

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 019

Over een probleem betreffende symmetrische matrices

H.J.A. Duparc, C.G. Lekkerkerker en Dr. W. Peremans



1951

Over een probleem betreffende symmetrische
matrices.

door

H.J.A. Duparc, C.G. Lekkerkerker en Dr W. Peremans.

Aan de afdeling zuivere wiskunde werden twee vermoede stellingen voorgelegd. In dit rapport worden van de eerste stelling drie bewijzen gegeven; het tweede vermoeden wordt door tegenvoorbeelden weerlegd.

Een symmetrische matrix (c_{jk}) van de orde n , waarvan de elementen complexe getallen zijn ($c_{jk} = a_{jk} + ib_{jk}$, a_{jk} en b_{jk} reëel) heet positief, als de quadratische vorm, behorende bij de matrix (a_{jk}) der reële delen positief semi-definiet is, dus

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_j x_k \geq 0$$

voor alle reële $(x_1, \dots, x_n)$.

Vermoeden I.

Als van een positieve matrix $C = (c_{jk})$ de determinant $= 0$ is, bestaat een stelsel reële getallen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, die niet alle $= 0$ zijn, zodat

$$\sum_{k=1}^n c_{jk} \lambda_k = 0 \text{ voor } j=1, \dots, n.$$

Vermoeden II.

Een positieve matrix van rang r is op één en slechts één manier te schrijven als de som van r positieve matrices van rang 1.

Bij de bewijzen van vermoeden I wordt de volgende hulpstelling gebruikt.

Hulpstelling 1.

Laten $A = (a_{jk})$ en $B = (b_{jk})$ matrices zijn van de orde n , a_{jk} complex, b_{jk} reëel, det $b_{jk} \neq 0$. Noem $A^* = B'AB = (a_{jk}^*)$ (Als D een matrix is, noemen we de getransponeerde matrix D'). Als er een stelsel getallen $\mu_1, \dots, \mu_n$ bestaat die niet alle $= 0$ zijn, waarvoor

$$\sum_{k=1}^n a_{jk}^* \mu_k = 0 \text{ voor } j=1, \dots, n,$$

dan is er een stelsel getallen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, die niet alle $=0$ zijn, waarvoor $\sum_{k=1}^n a_{jk} \lambda_k = 0$ voor $j=1, \dots, n$ en wel voldoen $\lambda_m = \sum_{k=1}^n b_{mk} \mu_k$ voor $m=1, \dots, n$. Als $\mu_1, \dots, \mu_n$ reëel zijn, kunnen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dus ook reëel worden gekozen.

Bewijs: $a_{jk}^* = \sum_{l,m=1}^n b_{lj} a_{lm} b_{mk}$, dus $\sum_{k,l,m=1}^n b_{lj} a_{lm} b_{mk} \mu_k = 0$ dus $\sum_{l=1}^n b_{lj} \sum_{k,m=1}^n a_{lm} b_{mk} \mu_k = 0$ voor $j=1, \dots, n$. Omdat det $b_{jk} \neq 0$, volgt hieruit $\sum_{k,m=1}^n a_{lm} b_{mk} \mu_k = 0$ voor $l=1, \dots, n$. Dus voldoet $\lambda_m = \sum_{k=1}^n b_{mk} \mu_k$ voor $m=1, \dots, n$ inderdaad aan de vereisten. Verder zijn de λ_m niet alle $=0$, omdat anders uit det $b_{mk} \neq 0$ zou volgen dat alle $\mu_k = 0$ zouden zijn.

Eerste bewijs van vermoeden I (Dr W. Peremans).

Hulpstelling 2. Als bij een reële symmetrische matrix (a_{jk}) van orde n een positief semi-definiete quadratische vorm behoort, is $a_{jj} \geq 0$ voor $j=1, \dots, n$. Als $a_{kk}=0$, dan is $a_{jk}=a_{kj}=0$ voor $j=1, \dots, n$.

Bewijs: Substitueer in $\sum_{k,l=1}^n a_{kl} x_k x_l$ $x_j=1$ en $x_l=0$ voor $l \neq j$ dan gaat deze vorm over in a_{jj} , dus $a_{jj} \geq 0$. Als $a_{jj}=0$ substitueren we $x_j=y_1$, $x_k=y_2$, $x_l=0$ voor $l \neq j, l \neq k$, dan gaat de vorm over in $2a_{jk}y_1y_2 + a_{kk}y_2^2$. Dit is een positief semi-definiete quadratische vorm in y_1 en y_2 . Als $a_{kk}=0$, geeft substitutie van $y_1=y_2=1$, dat $a_{jk} \geq 0$ en $y_1=-y_2=1$, dat $a_{jk} \leq 0$, dus $a_{jk}=0$. Als $a_{kk} \neq 0$, (dus $a_{kk} > 0$) dan gaat door substitutie van $y_1=-a_{jk}/a_{kk}$, $y_2=a_{jk}$ de vorm over in $-a_{kk}a_{jk}^2$ en dit is alleen ≥ 0 als $a_{jk}=0$.

Omdat det $c_{jk}=0$, bestaan er in ieder geval complexe getallen $\mu_1, \dots, \mu_n$, die niet alle $=0$ zijn, zodat $\sum_{k=1}^n c_{jk} \mu_k = 0$ voor $j=1, \dots, n$. Als de verhoudingen der μ 's alle reëel zijn, gaan deze door vermenigvuldiging met een geschikt gekozen complex getal $\neq 0$ in reële getallen over die ook aan de gevraagde relatie voldoen. We kunnen dus veronderstellen dat de verhoudingen der μ 's niet alle reëel zijn. Zonder beperking der algemeenheid mogen we veronderstellen dat $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ niet reëel is.

Noem $M_j = M'_j + i M''_j$ (M'_j en M''_j reële getallen, $j=1, \dots, n$). Dan is $M'_1 M''_2 - M'_2 M''_1 \neq 0$. De volgende matrix $T = (\alpha_{jk})$ is dan reëel en heeft een determinant $\neq 0$:

$$\begin{pmatrix} M'_1 & M''_1 & 0 & \dots & 0 \\ M'_2 & M''_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ M'_n & M''_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Noem nu $D = T^* C T = (d_{jk})$, dan is $d_{jk} = \sum_{l,m=1}^n \alpha_{lj} c_{lm} \alpha_{mk}$, dus

$$d_{j1} = \sum_{l,m=1}^n \alpha_{lj} c_{lm} M'_m \text{ en } d_{j2} = \sum_{l,m=1}^n \alpha_{lj} c_{lm} M''_m, \text{ dus } d_{j1} + i d_{j2} = \sum_{l,m=1}^n \alpha_{lj} \left(\sum_{m=1}^n c_{lm} M_m \right) = 0 \text{ voor } j=1, \dots, n.$$

Uit $\left. \begin{matrix} d_{11} + i d_{12} = 0 \\ d_{21} + i d_{22} = 0 \end{matrix} \right\}$ volgt, daar $d_{12} = d_{21}$, direct $d_{11} = -d_{22}$. De matrix

der reële delen van (d_{jk}) bepaalt een positief semi-definiëte quadratische vorm, dus volgens hulpstelling 2 is $\Re d_{11} \geq 0$, $\Re d_{22} \geq 0$, maar omdat $d_{11} = -d_{22}$, is $\Re d_{11} = -\Re d_{22}$, dus $\Re d_{11} = \Re d_{22} = 0$. Uit hulpstelling 2 volgt nu dat ook $\Re d_{j1} = \Re d_{j2} = 0$ voor $j=1, \dots, n$. Maar dan geeft $d_{j1} + i d_{j2} = 0$ dat ook $\Im d_{j1} = \Im d_{j2} = 0$, dus $d_{j1} = d_{j2} = 0$ voor $j=1, \dots, n$. Omdat $d_{j1} = 0$ is, is $(M'_1, \dots, M'_n) = (1, 0, \dots, 0)$ een stelsel getallen waarvoor $\sum_{k=1}^n d_{jk} M'_k = 0$. Volgens hulpstelling 1 geldt voor $\sum_{k=1}^n \alpha_{mk} M'_k = M'_m$, dat $\sum_{m,k=1}^n c_{jm} M'_m = 0$ voor $j=1, \dots, n$ waarmee de stelling bewezen is. (We hadden op dezelfde wijze kunnen aantonen dat $\sum_{m=1}^n c_{jm} M''_m = 0$.)

Tweede bewijs van vermoeden I (H.J.A. Duparc).

Door een reële transformatie is het steeds mogelijk de vorm

$$\sum_{r,s=1}^n a_{rs} x_r x_s \text{ op de diagonaalgedaante } \sum_{r=1}^n A_r x_r^2 \text{ te brengen, waarbij}$$

wegens het semi-definiëte zijn dezer vorm geldt $A_r \geq 0$ voor alle r . Wij

nummeren de variabelen zo, dat $A_1 > 0, \dots, A_k > 0; A_{k+1} = \dots = A_n = 0$. Hierbij

is $k \leq n$. De reële niet-singuliere transformatie transformeert de matrix

$$(b_{rs}), \text{ dus ook de matrix } (c_{rs}) \text{ tot een matrix } (B_{rs}) \text{ resp. } (C_{rs}) =$$

$$= (A_r \delta_{rs} + i B_{rs}). \text{ Bewijzen wij nu de stelling voor de getransformeerde}$$

matrix dan vindt men daarvoor reële coëfficiënten $U_1, \dots, U_n$ met de ge-

wenste eigenschap en op grond van hulpstelling 1 vindt men dan reële

coëfficiënten $u_1, \dots, u_n$ met de verlangde eigenschap voor de oorspronkelijke matrix (c_{rs}) .

Omdat de determinant van (C_{rs}) nul is, bestaan er in ieder geval complexe getallen $V_1+iW_1, \dots, V_n+iW_n$ (niet alle nul) waarvoor geldt

$$\sum_{s=1}^n (V_s+iW_s) C_{rs} = 0 \quad (r=1, \dots, n),$$

dus

$$(1) \quad - \sum_{s=1}^n W_s B_{rs} + V_r A_r = 0 \quad (r=1, \dots, n),$$

en

$$(2) \quad \sum_{s=1}^n V_s B_{rs} + W_r A_r = 0 \quad (r=1, \dots, n).$$

Hieruit volgt

$$\sum_{r=1}^n V_r^2 A_r = \sum_{r,s=1}^n V_r W_s B_{rs} = \sum_{r,s=1}^n V_s W_r B_{rs} = - \sum_{r=1}^n W_r^2 A_r,$$

dus

$$\sum_{r=1}^n (V_r^2 + W_r^2) A_r = 0,$$

waaruit wegens $A_1 > 0, \dots, A_k > 0$, volgt $V_1=W_1=\dots=V_k=W_k=0$. Was nu $k=n$, dan waren alle $V_1+iW_1, \dots, V_n+iW_n$ nul in strijd met de onderstelling dienaangaande.

Dus $k < n$. Voor alle $r=1, \dots, n$ is dus $V_r A_r = W_r A_r = 0$. De relaties

(1) en (2) luiden dan

$$(3) \quad \sum_{s=k+1}^n W_s B_{rs} = 0 \quad ; \quad \sum_{s=k+1}^n V_s B_{rs} = 0,$$

waarbij wegens $k < n$ er tenminste één der getallen $W_{k+1}, \dots, W_n$,

$V_{k+1}, \dots, V_n$ van nul verschilt. Is dat een der getallen $W_{k+1}, \dots, W_n$ dan

is het stel $(W_1, \dots, W_n)$ het gezochte stel; is dat een der getallen

$V_{k+1}, \dots, V_n$, dan is het stel $(V_1, \dots, V_n)$ het gezochte stel.

Opmerkingen.

1°. Uitgaande van een stel complexe getallen $U_1, \dots, U_n$, die niet door vermenigvuldiging met een geschikte factor alle reëel te maken zijn, vindt men zelfs twee oplossingen, n.l. $(V_1, \dots, V_n)$ en $(W_1, \dots, W_n)$ van het gestelde probleem.

2°. Wij zien op grond van (1), (2) en (3) dat het punt $(V_1, \dots, V_n)$ (en het punt $(W_1, \dots, W_n)$ eveneens) van elk der beide hyperquadrieken

$$\sum_{r,s=1}^n A_{rs} X_r X_s = 0 \quad ; \quad \sum_{r,s=1}^n B_{rs} X_r X_s = 0$$

3°. Het is direct duidelijk dat ieder reëel punt $(V_1, \dots, V_n)$, dat voldoet aan $\sum_{s=1}^n U_s C_{rs} = 0$ ($r=1, \dots, n$), dubbelpunt is van de beide in 2° genoemde hyperquadrieken.

Derde bewijs van vermoeden I (C.G. Lekkerkerker).

We schrijven $\sum_{j=1}^n x_j y_j = (X, Y)$.

Hulpstelling 3. Zijn A en B twee reële, symmetrische matrices van orde r, en is A positief definit, dan bestaat er een matrix T, zodat $T'AT$ de eenheidsmatrix van orde r en $T'BT$ een diagonaalmatrix van orde r is.

Bewijs. Zij X de vector $(x_1, \dots, x_r)$ en zij $A = (a_{kj})$. Dan is $(AX, X) = \sum_{k,j=1}^r a_{kj} x_k x_j$ een positief definitie quadratische vorm, te schrijven als som van r quadraten. Er bestaat dus een matrix $U = (u_{kj})$, met $\det U \neq 0$, zodat door de substitutie $X = UY$, voluit geschreven

$x_k = \sum_{j=1}^r u_{kj} y_j$ ($k=1, 2, \dots, r$), die quadratische vorm overgaat in $\sum_{j=1}^r y_j^2$. D.w.z. $(AX, X) = (AUY, UY) = (U'AU Y, Y)$ is identiek met (Y, Y) . Dus $U'AU$ is eenheidsmatrix.

Zij $U'BU = C$, Dan is C reëel en symmetrisch, heeft dus reële eigenwaarden, en bezit een orthonormaal stelsel van eigenvectoren. Er bestaat dus een orthogonale matrix V, zodat $V'CV$ een diagonaalmatrix is.

De matrix $T = UV$ voldoet dan aan de vraag.

Hulpstelling 4. Er is een niet singuliere matrix T, zodat een matrix A overgaat in $T'AT$ doordat men eerst de k^{de} rij vermeerderd met λ -maal de j^{de} rij en daarna de k^{de} kolom met λ -maal de j^{de} kolom.

Het gaat nu om het bewijs van de volgende stelling:

Zij $C = (a_{kj} + ib_{kj})$ een matrix van orde n, $\det C \neq 0$, a_{kj} en a'_{kj} reëel ($k, j=1, \dots, n$), $A = (a_{kj})$ semi-positief definit. Dan bestaan er n reële getallen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, niet alle nul, zodat geldt:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j (a_{kj} + ib_{kj}) = 0 \quad (k=1, \dots, n).$$

Bewijs. Zij r de rang van A. Er bestaat dan een reële, niet-singuliere matrix T_1 , zodat $T_1'AT_1 = A_1$ een diagonaalmatrix is met alleen op de eerste r plaatsen van de hoofddiagonaal een element $\neq 0$. Zij $B = (b_{kj})$; T_1 kan zó bepaald worden, dat het gedeelte van de matrix $T_1'BT_1$ dat tot de laatste $n-r$ rijen en kolommen behoort, een diagonaalmatrix is met op de eerste s plaatsen van de hoofddiagonaal een element $b_{\sigma\sigma} \neq 0$ ($\sigma=1, \dots, s$)

Stel eens, dat geen der c_t gelijk aan nul is en zij $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ een stel van n getallen zodat $\sum_{j=1}^n \lambda_j d_{kj} = 0$ voor $k=1, \dots, n$, als (d_{kj}) de matrix $T'CT$ is. Beschouwing van de laatste t rijen leert: $\lambda_1 = \dots = \lambda_t = 0$. Let men op de eerste r rijen, dan volgt, dat ook geldt: $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$, $\lambda_{n-t} = \lambda_{n-t+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Op de overige rijen lettende ziet men dat ook de overige getallen λ_j gelijk aan nul zijn. Er volgt zo een tegenspraak met het feit dat $\det C = 0$ is. Hiermee is de stelling volledig bewezen.

Opmerkingen: Uit het bovenstaande vloeien nog de volgende consequenties voort:

1. De matrix A is niet positief definit. Want $n-r=s+t \geq t \geq 1$.
2. Zij t_0 het aantal elementen c_t in de matrix $T'BT$, dat gelijk aan nul is. Dan is $t_0 \geq 1$; elk stel reële of complexe getallen $\lambda_j (j=1, \dots, n)$, waarvoor geldt $\sum_{j=1}^n \lambda_j (a_{kj} + ib_{kj}) = 0$ ($k=1, \dots, n$), ontstaat door lineaire combinatie met reële resp. complexe coëfficiënten uit t_0 bepaalde reële stellen (zie hulpstelling 1).

Tegenvoorbeeld tegen vermoeden II. Allereerst tegen het bestaan van de gevraagde splitsing. (Dr W. Peremans)

Neem de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$ en stel dat

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\alpha & i-\beta \\ i-\beta & -\gamma \end{pmatrix}$$

een splitsing van de verlangde soort is.

De reële delen moeten een positief semi-definiëte matrix bepalen voor elk der matrices. In de hoofddiagonaal moeten elementen ≥ 0 staan, dus $\Re \gamma = 0$. Dan is ook $\Re \beta = 0$. Schrijf het dus nu zo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib & ic \\ ic & id \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-(a+ib) & i-ic \\ i-ic & -id \end{pmatrix}.$$

waarin a, b, c, d reël zijn. We gebruiken nu dat de rang $= 1$ is. Dus

$$(1) \quad \begin{aligned} (a+ib)id + c^2 &= 0 \\ -id + (a+ib)id + c^2 - 2c + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Door aftrekken vindt men

$$-id - 2c + 1 = 0$$

dus

$$\begin{aligned} d &= 0 \\ c &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Substitueert men $d=0$ in (1), dan vindt men $c=0$. Dit geeft een tegenspraak.

Dat, als er een splitsing van de gewenste soort bestaat, deze niet eenduidig is, blijkt uit het volgende voorbeeld (H.J.A.Duparc).

De matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ is positief en heeft de rang 2. Deze is inderdaad splitsbaar in 2 positieve matrices van de rang 1,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

maar er zijn gemakkelijk andere splitsingen te geven. Immers stel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ab \\ ab & ab^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-a & 2-ab \\ 2-ab & 6-ab^2 \end{pmatrix}$$

waarbij de tweede matrix de rang 1 bezit, zodat men heeft

$$2=a(6-4b+b^2),$$

dus voor iedere b geldt bovenstaande splitsing met $a=\frac{2}{b^2-4b+6}$. Wegens

$a=\frac{2}{(b-2)^2+2} \leq 1$ is de tweede matrix ook positief.